Εφαρμογή 1

Ο οριακός λόγος μετασχηματισμού δίνεται από την σχέση

$$\frac{-dy}{dx}$$

Αρα αρκεί να υπολογίσουμε την παραπάνω έκφραση

$$2x^2+y^2=250 \rightsquigarrow y=\sqrt{250-2x^2}$$

$$\frac{-dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{250-2x^2}}(-4x)=\frac{1}{2y}(-4x) \text{ άρα } y=\sqrt{250-2x^2}$$

Αρα $\frac{-dy}{dx}=\frac{-4x}{2y}=\frac{-2x}{y}$ για $x=20$ και $y=10$

$\frac{-dy}{dx}=4$ Δηλαδή το κόστος ευκαιρίας παραγωγής ενός επιπλέον μονάδας από το x είναι διπλάσιο παραγωγής τεσσάρων μονάδων από το y

Εφαρμογή 2

Σύμφωνα με την θεωρία πρέπει να ισχύει

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}<0$ και $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}<0$. Πράγμα που ισχύει άρα για $U=100\log x+50\log y$ έχουμε

$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{100}{x}>0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{-100}{x^2}<0$ και

$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{50}{y}>0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{-50}{y^2}<0$

Εφαρμογή 3

Δυμήνα μεταξύ δύο σημείων σταθερού λόγος υποκατάστασης δίνεται από την σχέση

$$\text{ΟΛΧ} = \frac{-dy}{dx} = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{-\frac{100}{x}}{\frac{50}{y}} = -\frac{2y}{x}$$

Εφαρμογή 4

$$\max U = f(x,y)$$
$$\text{S.t.} \quad I = P_x X + P_y Y$$

α. Το ολικό διαφορικό της U είναι

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0 \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} dx = -\frac{\partial U}{\partial y} dy \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} = -\frac{MU_x}{MU_y}$$

β. $I = P_x X + P_y Y \rightsquigarrow y = \frac{I}{P_y} - \frac{P_x}{P_y} X$ (παράγωγή ευθείας)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P_x}{P_y}$$

Στο σημείο ισορροπίας εφάπτονται οι U και I άρα οι κλίσεις τους ισούνται

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P_x}{P_y} = -\frac{MU_x}{MU_y} \text{ ή } \frac{-dy}{dx} = \frac{P_x}{P_y} = \frac{MU_x}{MU_y}$$

Εφαρμογή 5

Ξέρουμε πως $-\frac{dy}{dx} = \frac{P_x}{P_y} = \frac{MU_x}{MU_y}\left(=\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y}\right)$

μάνουτσ αντικατάσταση έχουμε πως

$\frac{P_x}{P_y} = \frac{66-6x}{34-4y}$ και άρα $P_x = 6$ και $P_y = 2$

$\frac{6}{2} = \frac{66-6x}{34-4y} \rightsquigarrow 11-x = 17-2y$ (1)

διότι ξέρουμε από την ταυτότητα πως $I = P_x X + P_y y \rightsquigarrow$

$34 = 6x + 2y$

$y = 17-3x$ (2)

από $\frac{(1)}{(2)} \rightsquigarrow x^* = 4$

$y^* = 5$

Εφαρμογή 6

Ξέρουμε πως $\frac{P_x}{P_y} = \frac{MU_x}{MU_y}\left(=\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y}\right)$

άρα $\frac{P_x}{P_y} = \frac{y+1}{x+1} \rightsquigarrow y = \frac{P_x}{P_y}(x+1) - 1$ (@)

διότι ξέρουμε πως

$I = P_x X + P_y Y$ (@) από την ταυτότητα

$x^* = \frac{I - P_x + P_y}{2P_x}$ και

$y^* = \frac{I - P_y + P_x}{2P_y}$